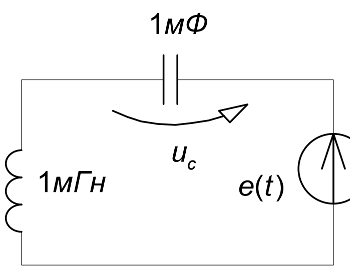
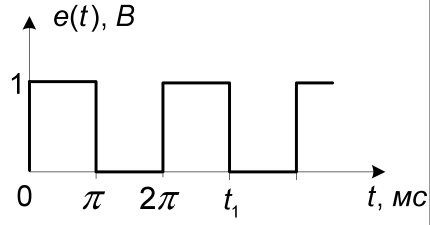
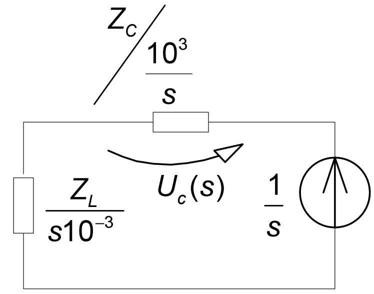
Олимпиада по теории электронных цепей “ТЭЦ'2013”, посвященная памяти проф. Сигорского В.П. (21.11.2013)

Задача 2.

В момент времени t=0 напряжение на емкости и ток через индуктивность равны нулю. График напряжения источника $e(t)$ приведен на рисунке. Определить значение напряжения на емкости в момент времени t_1.







Операторная схема

Схема линейна, поэтому для расчета ее отклика на воздействие сигнала $e(t)$ источника можно использовать переходную характеристику $h(t)$, которая представляет собой реакцию на сигнал источника в виде функции Хевисайда $\sigma(t)$ (единичной ступенчатой функции) при нулевых начальных условиях. Определим $h(t)$ операторным методом. Для этого заменим исходную схему операторной, приведенной на рисунке, где сигнал источника заменен на операторное изображение ф-ции Хевисайда. Операторное изображение $H(s)$ переходной характеристики $h(t)$ находим по формуле делителя напряжения

$$H(s) = U_C(s) = \frac{1}{s}\frac{Z_C}{Z_C + Z_L} = \frac{1}{s(1+s^2LC)} = \frac{1}{s(1+s^2 10^{-6})}. \tag{1}$$

Для определения оригинала найдем полюсы $H(s)$, решив уравнение $s(1+s^2 10^{-6}) = 0$. Полюсы равны: $p_1 = 0,\ p_2 = j10^3,\ p_3 = -j10^3,\ (j = \sqrt{-1})$. Поскольку полюсы простые, то оригинал находится по формуле

$$h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_3 e^{p_3 t}, \tag{2}$$

где коэффициенты разложения $K_i,\ i = 1,2,3$ находятся по формуле

$$K_i = (s - p_i)\,H(s)\big|_{s=p_i},\ i = 1,2,3 \tag{3}$$

Для удобства вычисления коэффициентов разложения по (3) представим (1) в следующем виде (теорема Виета):

$$H(s) = \frac{1}{10^{-6}(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}. \tag{4}$$

По (3), (4) находим $K_i,\ i = 1,2,3$ и подставляем в (2):

$$h(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{j10^3 t} + \frac{1}{2}e^{-j10^3 t} = 1 - \cos(10^3 t),\ t \ge 0. \tag{5}$$

Сигнал источника $e(t)$ до момента времени $t_1 = 3\pi\ мс$ можно выразить через три функции Хевисайда $\sigma(t)$:

$$e(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \pi 10^{-3}) + \sigma(t - 2\pi 10^{-3}), \tag{6}$$

тогда, исходя из свойства стационарности схемы, напряжение на емкости выражается через переходную характеристику $h(t)$:

$$u_c(t) = h(t) - h(t - \pi 10^{-3}) + h(t - 2\pi 10^{-3}), \tag{7}$$

а его значение в момент t_1 равно:

$$u_c(t_1^-) = u_c(t_1^+) = h(t_1) - h(t_1 - \pi 10^{-3}) + h(t_1 - 2\pi 10^{-3}), \tag{8}$$

где из (5)

$$
\begin{aligned}
&h(t_1) = 1 - \cos(10^3 3\pi 10^{-3}) = 2;\\
&h(t_1 - \pi 10^{-3}) = 1 - \cos(10^3(3\pi - \pi)10^{-3}) = 0;\\
&h(t_1 - 2\pi 10^{-3}) = 1 - \cos(10^3(2\pi - \pi)10^{-3}) = 2.
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Подставив (9) в (8) получаем: $u_c(t_1) = 4\,B$.

Следует отметить, что резонансная частота данного колебательного контура равна $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 10^3\,\dfrac{рад}{с}$, что совпадает с частотой сигнала $e(t)$; напряжение на емкости будет увеличиваться за каждый период колебаний на 2 В, т.е. будет происходить накачка контура электрической энергией, которая сохраняется вследствие отсутствия потерь в колебательном контуре и синхронного воздействия источника.