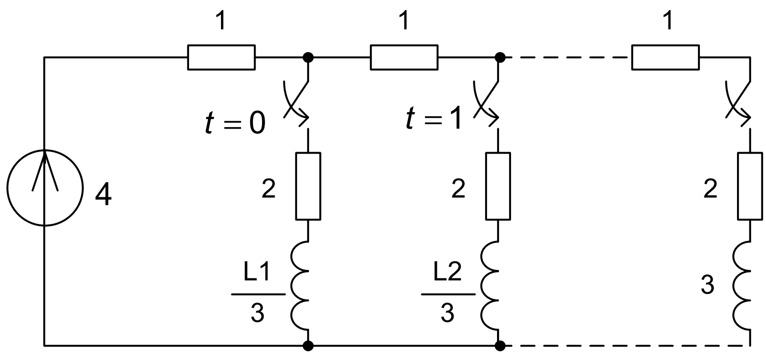
23.11.2011

Олимпиада "ТЭЦ'2011",

посвященная памяти

проф. Сигорского Виталия Петровича

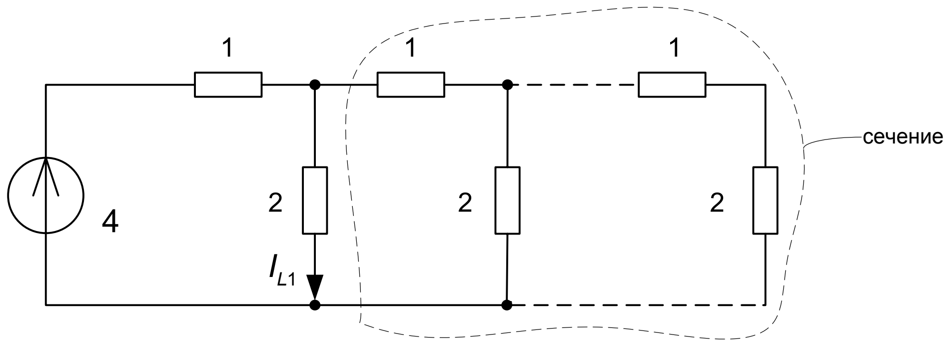


Задача 3.

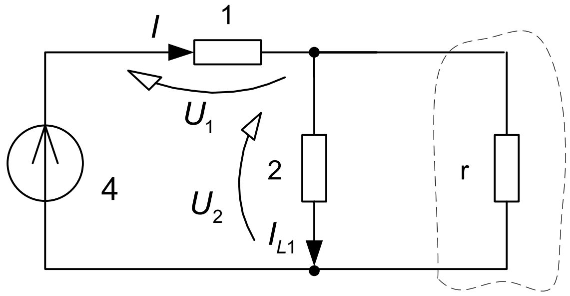
Одинаковые RL-звенья подключаются к схеме с интервалом 1с. Количество звеньев бесконечно. К какой величине стремится ток через индуктивность L1? Номиналы компонентов заданы в системе СИ.

Решение

Замыкание ключей приводит к переходному процессу, который завершится установившимся состоянием при $t \to \infty$. В установившемся состоянии все токи и напряжения примут постоянные значения, так как сигнал источника постоянный. Следовательно, напряжения на индуктивностях будут стремиться к нулю, что позволяет заменить индуктивности короткозамкнутыми ветвями. В результате схема примет следующий вид:



Пусть сопротивление двухполюсника, ограниченного сечением, равно r. Тогда предыдущую схему можно заменить следующей, эквивалентной исходной:



Найдем сопротивление двухполюсника $r_э$, подключенного к идеальному источнику напряжения:

$$r_э = 1 + \frac{2r}{2+r}. \tag{1.1}$$

Найдем ток I и напряжение U_1 по закону Ома:

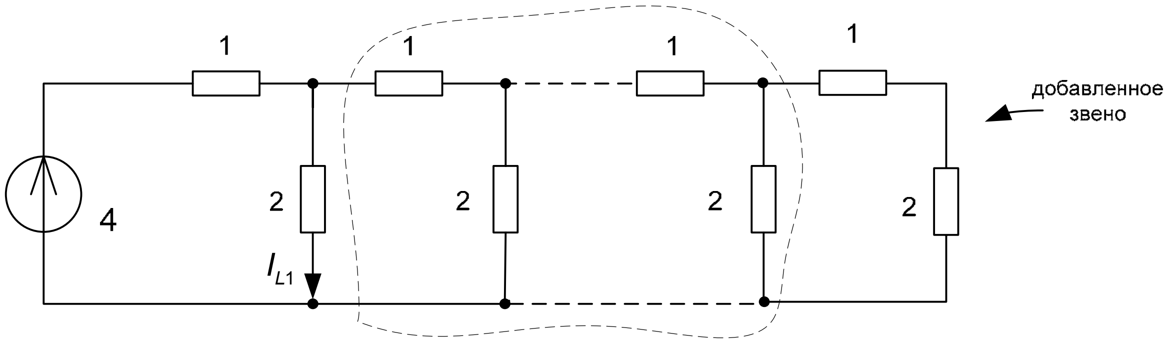
$$I = \frac{4}{r_э}\ A;\quad U_1 = I \cdot 1 = \frac{4}{r_э}\ B.$$

Найдя по II закону Кирхгофа напряжение U_2, определим искомый ток I_{L1} по закону Ома:

$$I_{L1}=\frac{U_2}{2}=\frac{4-U_1}{2}=\frac{4-\frac{4}{r_э}}{2}=2-\frac{2}{r_Э}\ A. \qquad (1.2)$$

Чтобы получить искомый ток в числовом виде, рассчитаем $r_э$ и подставим в (1.2).

Для этого вернемся к двухполюснику, выделенному сечением, сопротивление которого принято равным некоторой величине r. Если к нему добавить еще одно звено справа, то получим следующую схему:



Теперь полученный двухполюсник имеет такое же количество звеньев, что и двухполюсник, который был подключен к идеальному источнику напряжения до добавления звена, поэтому его сопротивление будет равно $r_э$ и соотношение (1.1) примет следующий вид:

$$r_э=1+\frac{2r_э}{2+r_э}. \qquad (1.3)$$

Левая часть соотношения (1.1) осталась без изменения, так как добавление одного звена к бесконечному количеству звеньев не может изменить общего сопротивления $r_э$. Решив уравнение (1.3) относительно $r_э$, находим $r_э=2\ Ом$. Подставив этот результат в (1.2), получим:

$$I_{L1}=2-\frac{2}{r_Э}=1\ A. \qquad (1.4)$$

<u>II способ</u>

Более строго можно получить искомый результат, определяя сопротивление двухполюсника по следующей рекуррентной формуле:

$$r_n=1+\frac{2r_{n-1}}{2+r_{n-1}}, \qquad (1.5),$$

где n-количество звеньев в двухполюснике ($r_1=3$ Ом – сопротивление первого звена справа).

Найдем следующие сопротивления:

$$r_2=1+\frac{2r_1}{2+r_1}=1+\frac{6}{5}=1+\frac{a+1}{a+0}=2+\frac{1}{a+0};$$

$$r_3=1+\frac{2r_2}{2+r_2}=1+\frac{4a+2}{4a+1}=2+\frac{1}{4a+1};$$

$$r_4=1+\frac{2r_3}{2+r_3}=1+\frac{16a+6}{16a+5}=2+\frac{1}{16a+5};$$

$$r_5=1+\frac{2r_4}{2+r_4}=1+\frac{64a+22}{64a+21}=2+\frac{1}{64a+21},$$

где $a=5$. Обобщает полученную последовательность сопротивлений следующее соотношение:

$$r_n = 2 + \frac{1}{a4^{n-2} + b_n},$$
$$b_n = 4b_{n-1} + 1; \quad n = 2,3,4....; \; b_1 = -\frac{1}{4}. \tag{1.6}$$

Тогда искомое значение $r_э$ находится следующим образом:

$$r_э = \lim_{n\to\infty} r_n = 2 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a4^{n-2} + b_n}\right) = 2 \text{ Ом}. \tag{1.7}$$

Подставив (1.7) в (1.4) получим: $I_{L1} = 1\ A$.